

Geschlossene elektrische Ströme in thermoelektrisch-anisotropen Kristallen¹

Von W. LUKOSZ

Institut für Theoretische Physik der Technischen Hochschule Braunschweig *

(Z. Naturforsch. 19 a, 1599—1610 [1964]; eingegangen am 15. Juli 1964)

In anisotropic (homogeneous) crystals the thermoelectric field produced by a temperature field is in general not irrotational; charge carriers moving on closed curves in the crystal gain energy in this field. Therefore stationary closed electric currents must be flowing in these crystals. The current distributions and electrical potentials in some „two-dimensional“ temperature fields are calculated.

These closed electric currents producing JOULE-, THOMSON-, and BRIDGMAN heat influence the temperature distribution in the crystal, and contribute to the heat current by convective heat transport. The total heat flow is increased by a factor which depends on the geometry of the crystal and on the temperature distribution, but which not exceeds $[1 + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})^2/4 L]$, where $(\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})$ is the anisotropy of the thermoelectric power and L is the LORENZ number.

1. Einleitung

Ausgangspunkt ist eine Betrachtung des SEEBECK-Effekts in homogenen Medien. Ist das Medium isotrop, z. B. ein kubischer Kristall, ist mit einem Temperaturgradienten die parallel gerichtete thermoelektrische Feldstärke

$$\mathbf{F} = -\varepsilon(T) \operatorname{grad} T \quad (1.1)$$

verknüpft, wenn $\varepsilon(T)$ die absolute Thermokraft bezeichnet.

In anisotropen Medien, z. B. nicht-kubischen Kristallen, wird die absolute Thermokraft durch einen Tensor 2. Stufe ε_{ik} beschrieben. Die thermoelektrische Feldstärke \mathbf{F} ist im allgemeinen nicht mehr zum erzeugenden Temperaturgradienten parallel; ihre Komponenten in einem kartesischen Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) sind:

$$F_i = - \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.2)$$

Auf die Ladungsträger wirkt außer der thermoelektrischen Feldstärke \mathbf{F} das elektrische Feld \mathbf{E} . Nach den MAXWELLSchen Gleichungen ist im stationären Zustand das elektrische Feld wirbelfrei (rot $\mathbf{E} = 0$); es kann daher als Gradient eines elektrischen Potentials φ dargestellt werden

$$(\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi).$$

Zwischen den auf die Ladungsträger wirkenden Kräften und der elektrischen Stromdichte \mathbf{I} besteht

¹ Teil der Diplomarbeit, Techn. Hochschule Braunschweig 1956.

* Jetzt Institut A für Physik der Techn. Hochschule Braunschweig.

die Beziehung:

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^3 \varrho_{ik} \mathbf{I}_k + \varepsilon_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \quad (1.3)$$

Dabei ist $\varphi^* = \varphi + \zeta/e$ das elektrochemische Potential, ζ die FERMI-Energie, e die Elektronenladung; ϱ_{ik} bezeichnet den Tensor des elektrischen Widerstandes.

An ein thermoelektrisches Medium, das von seiner Umgebung elektrisch isoliert sei, werde von außen eine Temperaturdifferenz angelegt. Zunächst sei das Medium als thermoelektrisch isotrop angenommen. In diesem Fall bauen die anfangs in einem kurzen Zeitintervall der thermoelektrischen Feldstärke folgenden Ladungsträger Raum- und Oberflächenladungen auf, deren elektrisches Feld im stationären Zustand die thermoelektrische Feldstärke überall genau kompensiert, so daß kein elektrischer Strom fließt.

$$-\operatorname{grad} \varphi^* + \mathbf{F} = 0, \\ -(\varphi_2^* - \varphi_1^*) = \int_{T_1}^{T_2} \varepsilon(T) \, dT. \quad (1.4)$$

Die Potentialdifferenz zwischen zwei beliebigen Punkten P_1 und P_2 hängt nur von deren Temperaturen T_1 und T_2 ab. Äquipotentialflächen und Isothermen fallen zusammen. (Dies ist die Grundlage der thermoelektrischen Temperaturmessung.)

Das notwendig wirbelfreie elektrische Feld kann die thermoelektrische Feldstärke \mathbf{F} aber nur dann kompensieren, wenn \mathbf{F} ebenfalls wirbelfrei ist. Diese Voraussetzung ist in isotropen Medien für beliebige Temperaturverteilungen erfüllt, da nach Gl. (1.1)



$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= -\varepsilon(T) \operatorname{rot} \operatorname{grad} T \\ &\quad - \frac{d\varepsilon}{dT} (\operatorname{grad} T \times \operatorname{grad} T) = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Dagegen ist in thermoelektrisch-anisotropen Medien – wie aus Gl. (1.2) folgt – die thermoelektrische Feldstärke im allgemeinen nicht wirbelfrei:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} \neq 0; \quad \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq 0.$$

Die Ladungsträger gewinnen bei einer Bewegung auf geschlossenen Bahnen in diesem Feld Energie. Daher müssen im Inneren nicht-isothermer thermoelektrisch-anisotroper Kristalle im allgemeinen stationäre geschlossene elektrische Ströme fließen. Ein einfaches Beispiel dafür zeigt Abb. 1. Auf die Existenz dieses Effektes haben inzwischen auch SAMOLOVICH und KORENBLIT² hingewiesen. Diese Ströme beeinflussen die Potentialverteilung; Äquipotentialflächen und Isothermen fallen nicht zusammen. Dies ist bei Thermokraft-Messungen an nicht-kubischen Kristallen zu beachten.

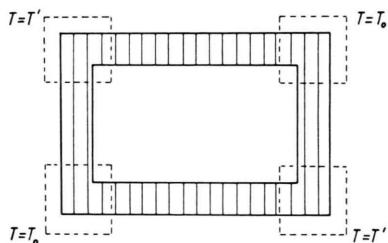


Abb. 1. Elementares Beispiel für das Fließen eines geschlossenen elektrischen Stromes in einem homogenen thermoelektrisch-anisotropen Einkristall. — Der Kristall hat die Form eines rechteckigen Ringes, dessen Ecken auf den Temperaturen T' bzw. T_0 gehalten werden. Die Richtung der Symmetrieachse des Kristalls ist durch die Schraffur angedeutet. Das Integral über die thermoelektrische Feldstärke \mathbf{F} bei einem geschlossenen Umlauf im Ring ist

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 2 \int_{T_0}^{T'} (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) dT,$$

wenn ε_{\parallel} , ε_{\perp} die absoluten Thermokräfte parallel bzw. senkrecht zur Symmetrieachse sind. Demnach gewinnen die Ladungsträger beim Umlauf im Ring Energie; es fließt ein elektrischer Ringstrom

$$I = \frac{2}{R} \int_{T_0}^{T'} (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) dT,$$

wenn R der elektrische Gesamtwiderstand des Ringes ist.

² A. G. SAMOLOVICH u. L. L. KORENBLIT, Fiz. Tverd. Tela **3**, 2054 [1961] bzw. Soviet Phys.-Solid State **3**, 1494 [1962].

In der vorliegenden Arbeit wird für Kristallplatten mit „zweidimensionalen“ Temperaturverteilungen eine allgemeine Methode zur Berechnung der Strom- und Potentialverteilungen zusammen mit einigen Beispielen angegeben. Auch die von den geschlossenen elektrischen Strömen erzeugten Magnetfelder werden betrachtet, da durch ihre Messung die Existenz der Ströme am direktesten experimentell nachweisbar wäre.

Für die Wärmestromdichte \mathbf{I}_w im thermoelektrischen Kristall gilt:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}_w^*)_i &\equiv (\mathbf{I}_w)_i - (\zeta/e) \mathbf{I}_i \\ &= \sum_{k=1}^3 \pi_{ik} \mathbf{I}_k - \lambda_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

wobei λ_{ik} der Wärmeleitfähigkeit-Tensor und π_{ik} der absolute PELTIER-Tensor ist. Danach ist mit einem elektrischen Strom ein Wärmestrom verknüpft. Die geschlossenen elektrischen Ströme in den thermoelektrisch anisotropen Kristallen werden einerseits durch diesen konvektiven Wärmetransport zum Gesamtwärmestrom beitragen und andererseits durch Erzeugung von JOURLESCHER, THOMSON- und BRIDGMAN-Wärme die Temperaturverteilung im Kristall beeinflussen. Die dadurch bedingte Vergrößerung der „effektiven Wärmeleitfähigkeit“ der Kristalle wird in Kap. 3 berechnet.

Die Materialgleichungen (1.3 u. 6), welche die Grundlage der vorliegenden Arbeit bilden, werden sowohl von der Elektronentheorie der Metalle und Halbleiter nach KOHLER³ wie von der Thermodynamik irreversibler Prozesse (vgl. DOMENICALI⁴) geliefert. Aus beiden Theorien folgt außer der KELVINSchen Beziehung ($\pi_{ik} = T \varepsilon_{ki}$) die Symmetrie der Tensoren des elektrischen Widerstandes ($\varrho_{ik} = \varrho_{ki}$) und der Wärmeleitfähigkeit ($\lambda_{ik} = \lambda_{ki}$). Für den Tensor der Thermokraft ergibt sich dagegen keine allgemeine Symmetrieforderung. Die Elektronentheorie verbietet aber nach³ das Auftreten eines von den Kristallsymmetrien zugelassenen antisymmetrischen Anteils des Thermokraft-Tensors im hexagonalen, tetragonalen und trigonalen Kristallsystem. Somit sind für Kristalle des hexagonalen, tetragonalen, trigonalen und rhombischen Systems, auf die sich die folgenden Untersuchungen beschränken, alle hier benutzten Material-Tensoren symmetrisch und in demselben Koordinatensystem auf Hauptachsen.

³ M. KOHLER, Ann. Phys., Lpz. **40**, 601 [1941]; ibid. **42**, 142 [1942].

⁴ C. A. DOMENICALI, Rev. Mod. Phys. **26**, 237 [1954].

2. Berechnung der geschlossenen elektrischen Ströme in Kristallplatten

Der thermoelektrisch-anisotrope Einkristall habe die Form einer ebenen Platte (beliebiger Dicke). Die kartesischen Koordinaten in der Plattenebene werden mit x , y , die zur Plattenebene senkrechte Koordinate mit z bezeichnet. Die Symmetriearchsen des Einkristalls mögen in folgender Weise zur Plattenebene orientiert sein: Bei einem hexagonalen, tetragonalen oder trigonalen Kristall liege die 6-, bzw. 4-, bzw. 3-zählige Achse in der Plattenebene (x -Achse). Bei einem zum rhombischen System gehörenden Kristall mögen zwei der orthogonalen 2-zähligen Achsen in der Plattenebene liegen (x - und y -Achse). Der Kristall sei elektrisch von seiner Umgebung isoliert, aber thermisch mit (mindestens) zwei Wärmereservoirn von verschiedener Temperatur in Kontakt. Dabei sei die stationäre Temperaturverteilung in der Kristallplatte nur von den Koordinaten x , y in der Plattenebene abhängig:

$$T = T(x, y). \quad (2.1)$$

In diesem Temperaturfeld sind die Komponenten der thermoelektrischen Feldstärke:

$$F_x = -\varepsilon_{xx} \cdot \partial T / \partial x; \quad F_y = -\varepsilon_{yy} \cdot \partial T / \partial y; \quad F_z = 0. \quad (2.2)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_x \mathbf{F} &= \operatorname{rot}_y \mathbf{F} = 0, \\ -\operatorname{rot}_z \mathbf{F} &= (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \frac{d(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Danach ist in Kristallen mit anisotroper Thermokraft ($\varepsilon_{xx} \neq \varepsilon_{yy}$) die thermoelektrische Feldstärke im allgemeinen nicht wirbelfrei.

Nur in wenigen speziellen Temperaturfeldern ist $\operatorname{rot}_z \mathbf{F} = 0$. Diese Temperaturfelder sind dadurch gekennzeichnet, daß folgende Bedingung gilt:

$$\int_{T_0}^{T(x,y)} [\varepsilon_{xx}(\bar{T}) - \varepsilon_{yy}(\bar{T})] d\bar{T} = g_1(x) + g_2(y). \quad (2.4)$$

⁵ Ist die Stabachse schief zur Symmetriearchse orientiert, ist die thermoelektrische Feldstärke nur unter folgenden Bedingungen wirbelfrei: Die an den Stab angelegte Temperaturdifferenz muß klein sein. Dann ist in einem im Verhältnis zur Dicke sehr langen Stab die Temperaturverteilung bei Vernachlässigung der Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit eine lineare Funktion der kartesischen Koordinaten; der Temperaturgradient ist ortsunabhängig. Dies gilt unter den experimentell i. allg. realisierten adiabatischen Versuchsbedingungen, bei denen der Wärmestrom die Richtung der Stabachse besitzt. Die thermoelektrische Feldstärke

Dabei sind g_1 , g_2 zwei beliebige Funktionen und T_0 eine beliebige konstante Temperatur. Gl. (2.4) ist die allgemeinste Lösung der Dgl. (2.3) mit der linken Seite $\operatorname{rot}_z \mathbf{F} = 0$. Der praktisch wichtigste Fall ist:

$$T = T(x) \quad \text{oder} \quad T = T(y).$$

Diese Temperaturverteilung ist in einem Kristallstab mit konstantem Querschnitt realisiert, zwischen dessen Enden eine Temperaturdifferenz angelegt ist, sofern die Stabachse parallel zur x - oder y -Achse ist⁵. Die Potentialverteilung ist durch Gl. (1.4) mit $\varepsilon = \varepsilon_{xx}$ (bzw. ε_{yy}) gegeben.

In allen übrigen Temperaturfeldern ist aber $\operatorname{rot}_z \mathbf{F} \neq 0$. Die Ladungsträger gewinnen bei einer Bewegung auf geschlossenen Bahnen in den zur Platteneoberfläche parallelen Ebenen $z = \text{const}$ im thermoelektrischen Feld Energie, da nach dem STOKESSCHEN Satz

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_F \operatorname{rot}_z \mathbf{F} dx dy \neq 0.$$

Dabei ist F die von der Bahnkurve C umschlossene Fläche. In der Kristallplatte fließen *flächenhafte* geschlossene elektrische Ströme, d. h., aus Symmetriegründen ist:

$$\mathbf{I}_z = 0. \quad (2.5)$$

Mit der Temperaturverteilung sind auch die Strom- und Potentialverteilungen in der Platte von z unabhängig. Die Bedingung der Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes verlangt – wie aus Gl. (1.3) folgt –:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (\varrho_{xx} \mathbf{I}_x) - \frac{\partial}{\partial x} (\varrho_{yy} \mathbf{I}_y) &= -\operatorname{rot}_z \mathbf{F} \\ &= (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \frac{d(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Zur Beschreibung der elektrischen Ströme wird eine Stromfunktion $H(x, y)$ eingeführt; es gelte:

$$\mathbf{I}_x = \partial H / \partial y; \quad \mathbf{I}_y = -\partial H / \partial x. \quad (2.7)$$

ist näherungsweise wirbelfrei, da in Gl. (2.3) der 1. Term verschwindet, und der zum Temperaturkoeffizienten der Anisotropie der Thermokraft proportionale 2. Term in der als klein vorausgesetzten Temperaturdifferenz quadratisch ist. Die Äquipotentialflächen und Isothermen fallen nicht zusammen. Durch Messung des Potentialgradienten in Richtung der Stabachse wird die „adiabatische“ Thermokraft erhalten, deren Abhängigkeit vom Winkel zwischen Symmetriearchse und Stabachse von KOHLER⁶ angegeben wird.

⁶ M. KOHLER, Ann. Phys. Lpz. **40**, 196 [1941].

Nach dem Ladungserhaltungssatz muß die statio-näre elektrische Stromverteilung quellenfrei sein:

$$\operatorname{div} \mathbf{I} = \frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_y}{\partial y} = 0. \quad (2.8)$$

Diese Bedingung wird von jeder nach Gl. (2.7) be-rechneten Stromverteilung erfüllt. Nach Gl. (2.7) ist der Vektor der elektrischen Stromdichte gleich dem in der $x-y$ -Ebene um 90° im mathematisch negativen Sinne gedrehten Gradienten von $H(x, y)$. Die Linien $H(x, y) = \text{const}$ sind elektrische Strom-

linien. Der zwischen zwei Stromlinien $H = H_1$ und $H = H_2$ in einer Platte der Dicke 1 [Längeneinheit] fließende Gesamtstrom ist

$$I = |H_2 - H_1|. \quad (2.9)$$

Der Rand der elektrisch isolierten Kristallplatte muß eine Stromlinie $H = \text{const}$ sein. Da nach Gl. (2.7) eine additive Konstante in der Stromfunktion H keine physikalische Bedeutung hat, darf auf dem Rand der Platte willkürlich $H = 0$ gesetzt werden.

Mit Gl. (2.7) wird aus Gl. (2.6) :

$$\varrho_{yy} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \varrho_{xx} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{d\varrho_{yy}}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{d\varrho_{xx}}{dT} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} = (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \frac{d(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (2.10)$$

Aus Gl. (2.10) ist die Stromfunktion $H(x, y)$ unter der Randbedingung $H = 0$ auf dem Rand der Platte zu berechnen. Mit der berechneten Stromfunktion läßt sich nach Gl. (2.7) die Stromverteilung und damit über Gl. (1.3) die Potentialverteilung bestimmen. Die Temperaturverteilung ist dabei als bekannt vorausgesetzt.

Wie in Kap. 3 gezeigt wird, ist die Temperaturverteilung im Kristall in guter Näherung durch die Wärmeleitung allein bestimmt. Die von den geschlossenen elektrischen Strömen erzeugten Jouleschen, THOMSON- und BRIDGMAN-Wärmen sind vernachlässigbar. Die Wärmeleitungsgleichung lautet:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.11)$$

Es ist zweckmäßig, die affine Koordinatentransformation

$$\tilde{x} = x; \quad \tilde{y} = \sqrt{\varrho_{yy}/\varrho_{xx}} \cdot y \quad (2.12)$$

durchzuführen. In den neuen Koordinaten lautet Gl. (2.10) :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{1}{\varrho_{yy}} \frac{d\varrho_{yy}}{dT} \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial H}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\varrho_{xx}} \frac{d\varrho_{xx}}{dT} \frac{\partial T}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial H}{\partial \tilde{y}} = \frac{(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})}{\sqrt{\varrho_{xx} \varrho_{yy}}} \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + \frac{1}{\sqrt{\varrho_{xx} \varrho_{yy}}} \frac{d(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})}{dT} \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial T}{\partial \tilde{y}}, \quad (2.13)$$

bzw. bei Vernachlässigung der Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes und der Thermokraft:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \tilde{y}^2} = \frac{(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})}{\sqrt{\varrho_{xx} \varrho_{yy}}} \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}}. \quad (2.14)$$

Unter der Annahme der Isotropie der WIEDEMANN-FRANZ-LORENZ-Zahl L :

$$L \cdot T = \varrho_{xx} \lambda_{xx} = \varrho_{yy} \lambda_{yy}, \quad (2.15)$$

(T = absolute Temperatur) geht die Wärmeleitungs-Gl. (2.11) bei Vernachlässigung der Temperatur-abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit in die LAPLACE-Gleichung über:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{y}^2} = 0. \quad (2.16)$$

Die Materialgln. (1.3) lauten:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi^*}{\partial \tilde{x}} &= \sqrt{\varrho_{xx} \varrho_{yy}} \frac{\partial H}{\partial \tilde{y}} + \varepsilon_{xx} \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}}, \\ -\frac{\partial \varphi^*}{\partial \tilde{y}} &= -\sqrt{\varrho_{xx} \varrho_{yy}} \frac{\partial H}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon_{yy} \frac{\partial T}{\partial \tilde{y}}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Im folgenden werden für einige Beispiele die be-rechneten Stromfunktionen und Potentialverteilun-gen angegeben. Bei diesen Rechnungen wurde die Temperaturabhängigkeit der Materialkonstanten ver-nachlässigt.

1. Beispiel (vgl. Abb. 2)

Die Kristallplatte sei ein Kreisring mit dem in-neren Radius $\tilde{r} = a$ und dem äußeren Radius $\tilde{r} = b$. Dies gelte in den Polarkoordinaten $\tilde{r}, \tilde{\alpha}$, wobei

$$\tilde{x} = \tilde{r} \cos \tilde{\alpha}; \quad \tilde{y} = \tilde{r} \sin \tilde{\alpha}.$$

In den natürlichen Koordinaten x, y sind die Plattenränder nach Gl. (2.12) Ellipsen. Die Plattenränder werden auf den Temperaturen T_a bzw. T_b ge-halten.

Die Temperaturverteilung in der Platte ist

$$T = T_b + \frac{T_b - T_a}{\ln b/a} \ln \frac{\bar{r}}{b}.$$

Für dieses Temperaturfeld lautet Gl. (2.14):

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial H}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{a}^2} = - \frac{(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})}{\sqrt{\varrho_{xx} \varrho_{yy}}} \frac{T_b - T_a \sin 2\bar{a}}{\ln b/a \cdot \bar{r}^2}.$$

Aus Symmetriegründen kann in der Platte kein Ringstrom zirkulieren. Die Ränder $\bar{r} = a$ und $\bar{r} = b$ und die \bar{x} - und \bar{y} -Achsen müssen die Stromlinie $H = 0$ bilden.

Die Lösung ist

$$H = H_0 \left\{ 1 - \frac{1}{a^2 + b^2} \left(\bar{r}^2 + \frac{a^2 b^2}{\bar{r}^2} \right) \right\} \sin 2\bar{a},$$

wobei $H_0 = \frac{\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}}{4\sqrt{\varrho_{xx} \varrho_{yy}}} \frac{T_b - T_a}{\ln b/a}$.

Das Maximum von H liegt bei $\bar{r} = \sqrt{ab}$; $\bar{a} = \pi/4$:

$$H_{\max} = H_0 \frac{(1-a/b)^2}{1 + (a/b)^2}.$$

Nach Gl. (2.9) gibt H_{\max} den in einem Quadranten der Platte zirkulierenden Gesamtstrom pro Dicken-Einheit der Platte an. Gegenüber Spiegelungen an der \bar{x} - wie an der \bar{y} -Achse ist $H(\bar{x}, \bar{y})$ antisymmetrisch. Daher beschränkt sich die Darstellung der Stromlinien in Abb. 2 auf einen Quadranten der Platte.

Die Berechnung der Potentialverteilung erfolgt über die auf Polarkoordinaten umgerechnete Gl. (2.17) :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi^*}{\partial \bar{r}} &= (\varepsilon_{xx} \cos^2 \bar{a} + \varepsilon_{yy} \sin^2 \bar{a}) \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} \\ &+ (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}) \frac{\sin 2\bar{a}}{2\bar{r}} \frac{\partial T}{\partial \bar{a}} + \sqrt{\varrho_{xx} \varrho_{yy}} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial H}{\partial \bar{a}}, \\ -\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \bar{a}} &= (\varepsilon_{xx} \cos^2 \bar{a} + \varepsilon_{yy} \sin^2 \bar{a}) \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial T}{\partial \bar{a}} \\ &+ (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}) \frac{\sin 2\bar{a}}{2} \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} - \sqrt{\varrho_{xx} \varrho_{yy}} \frac{\partial H}{\partial \bar{r}}. \end{aligned}$$

Die Potentialverteilung ist:

$$\begin{aligned} -\{\varphi^*(\bar{r}, \bar{a}) - \varphi_0^*\} &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \{T(\bar{r}) - T_b\} \\ &+ 4\varphi^* \left\{ 1 + \frac{1}{a^2 + b^2} \left(\bar{r}^2 - \frac{a^2 b^2}{\bar{r}^2} \right) \right\} \cos 2\bar{a}, \end{aligned}$$

wobei

$$4\varphi^* = -\sqrt{\varrho_{xx} \varrho_{yy}} H_0.$$

Die frei wählbare Konstante φ_0^* ist das Potential bei $\bar{r} = b$, $\bar{a} = \pi/4$. Das Potential ist gegenüber Spiegelungen an der \bar{x} - wie an der \bar{y} -Achse symmetrisch.

Für eine Kristallplatte aus Antimon (Sb) ist bei einer angelegten Temperaturdifferenz $T_b - T_a = 50^\circ\text{C}$ (wobei die mittlere Temperatur im Bereich der Zimmertemperatur liegt) und bei einem geometrischen Faktor $b/a \approx 2,7$ nach der Tabelle der Materialkonstanten $H_0 = 9,8 \text{ [A/cm]}$. Der in einem Quadranten der Platte zirkulierende Gesamtstrom pro 1 cm Plattendicke ist $H_{\max} = 0,35 H_0 = 3,4 \text{ [A]}$.

2. Beispiel

Die Kristallplatte sei kreisförmig mit dem Radius $\bar{r} = c$; in den natürlichen Koordinaten x, y ist nach Gl. (2.12) der Plattenrand eine Ellipse. Der innere Teil $\bar{r} \leq a$ der Platte werde auf der Temperatur T_a , der äußere Ring $b \leq \bar{r} \leq c$ auf der Temperatur T_b gehalten. Die Temperaturverteilung ist:

$$T(\bar{r}) = \begin{cases} T_a & \bar{r} \leq a, \\ \frac{T_b - T_a}{\ln b/a} \ln \frac{\bar{r}}{b} + T_b & \text{für } a \leq \bar{r} \leq b, \\ T_b & b \leq \bar{r} \leq c. \end{cases} \quad (\text{I})$$

$$T(\bar{r}) = \begin{cases} \frac{T_b - T_a}{\ln b/a} \ln \frac{\bar{r}}{b} + T_b & \text{für } a \leq \bar{r} \leq b, \\ T_b & b \leq \bar{r} \leq c. \end{cases} \quad (\text{II})$$

Die Temperaturverteilung im Gebiet (II) ist dieselbe wie im 1. Beispiel. Der Unterschied zum 1. Beispiel besteht darin, daß an das Gebiet (II) zwei isotherme Gebiete der Platte grenzen. Aus Symmetriegründen müssen der Plattenrand $\bar{r} = c$ und die \bar{x} - und \bar{y} -Achse eine Stromlinie $H = 0$ bilden. An den Grenzen $\bar{r} = a$ und $\bar{r} = b$ müssen die Stromfunktion H und das Potential φ^* stetig sein.

Metall	Kristall-system	$(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \left[10^{-6} \frac{\text{V}}{\text{Grad}} \right]$			$\varrho [10^{-6} \Omega \text{ cm}]$ bei $t = 0^\circ\text{C}$	W. F. L.-Zahl $\left[10^{-8} \frac{\text{V}^2}{\text{Grad}^2} \right]$	$\frac{1}{4} \left[\frac{\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}}{\sqrt{\varrho_{\parallel} \varrho_{\perp}}} \right]$ $\left[\frac{\text{A}}{\text{cm} \cdot \text{Grad}} \right]$ bei $t = 0^\circ\text{C}$
		$t = 0^\circ\text{C}$	50°C	100°C			
Sb	trigonal	26,2	27,3	28,4	29,3	38,4	$L \cong 2,60$
Bi	trigonal	54,0	46,6	39,2	126,0	100,0	3,07
Cd	hexagonal	3,20		5,24	7,73	6,36	2,37
Zn	hexagonal	1,74		2,54	5,59	5,39	2,52

Tab. 1. Materialkonstanten einiger nicht-kubischer Metalle (nach LANDOLT-BÖRNSTEIN, Zahlenwerte und Funktionen aus Physik, etc., Bd. II/6; Verlag Springer, Berlin 1959).

Die Rechnung ergibt:

$$(I) \quad \bar{r} \leq a,$$

$$H(\bar{r}, \bar{a}) = H_0 \frac{a^2 - b^2}{c^4} \bar{r}^2 \sin 2 \bar{a},$$

$$-\{\varphi^*(\bar{r}, \bar{a}) - \varphi_0^*\} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} (T_a - T_b) + 4\varphi^* \frac{b^2 - a^2}{c^4} \bar{r}^2 \cos 2 \bar{a};$$

$$(II) \quad a \leq \bar{r} \leq b,$$

$$H(\bar{r}, \bar{a}) = H_0 \left\{ 1 + \frac{a^2 - b^2}{c^4} \bar{r}^2 - \frac{a^2}{r^2} \right\} \sin 2 \bar{a},$$

$$-\{\varphi^*(\bar{r}, \bar{a}) - \varphi_0^*\} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \{T(\bar{r}) - T_b\} + 4\varphi^* \left\{ 1 + \frac{b^2 - a^2}{c^4} \bar{r}^2 - \frac{a^2}{r^2} \right\} \cos 2 \bar{a};$$

$$(III) \quad b \leq \bar{r} \leq c,$$

$$H(\bar{r}, \bar{a}) = H_0 (a^2 - b^2) \left\{ \frac{r^2}{c^4} - \frac{1}{r^2} \right\} \sin 2 \bar{a},$$

$$-\{\varphi^*(\bar{r}, \bar{a}) - \varphi_0^*\} = 4\varphi^* (b^2 - a^2) \left\{ \frac{r^2}{c^4} + \frac{1}{r^2} \right\} \cos 2 \bar{a}.$$

Dabei haben H_0 , $4\varphi^*$ und φ_0^* dieselbe Bedeutung wie im 1. Beispiel. Wie im 1. Beispiel fließen in jedem Quadranten der Platte geschlossene Ströme, die aber hier in beide isothermen Gebiete der Platte eindringen. Nur wenn $c \gg b$ ist, bleibt das innere isotherme Gebiet stromlos.

3. Beispiel (vgl. Abb. 3)

Eine punktförmige Wärmequelle oder Senke auf einer unendlich ausgedehnten Kristallplatte wird aus dem 1. Beispiel im Grenzfall $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow \infty$ erhalten. Für $b/a \gg 1$ gilt für alle Aufpunkte im Endlichen ($\bar{r} \ll b$) abgesehen von der unmittelbaren Umgebung der Wärmequelle bzw. Wärmesenke ($\bar{r} \gg a$):

$$T(\bar{r}) = \frac{T_b - T_a}{\ln b/a} \ln \frac{r}{b} + T_b,$$

$$H(\bar{r}, \bar{a}) = H_0 \sin 2 \bar{a},$$

$$-\{\varphi^*(\bar{r}, \bar{a}) - \varphi_0^*\} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \{T(\bar{r}) - T_b\} + 4\varphi^* \cos 2 \bar{a}.$$

Die Bedeutung der Konstanten H_0 , $4\varphi^*$ und φ_0^* ist im 1. Beispiel angegeben.

Gegenüber einer Spiegelung an der \bar{x} - wie an der \bar{y} -Achse ist $H(\bar{x}, \bar{y})$ antisymmetrisch, $\varphi^*(\bar{x}, \bar{y})$ symmetrisch.

Für das betrachtete Beispiel wurde die Stromfunktion H auch unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes und der Thermokraft aus Gl. (2.13) bestimmt. Dabei wurden die Temperaturkoeffizienten dieser Materialgrößen als temperaturunabhängig angenommen, und damit konsistent die Materialgrößen selbst um die mittlere Tem-

peratur $T_m = (T_a + T_b)/2$ in eine TAYLOR-Reihe entwickelt, die mit dem in $(T - T_m)$ linearen Glied abgebrochen wird. Vorausgesetzt wurde ferner:

$$\frac{1}{\varrho_{xx}} \frac{d\varrho_{xx}}{dT} = \frac{1}{\varrho_{yy}} \frac{d\varrho_{yy}}{dT}.$$

Die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit, die für Metalle im Temperaturbereich $0 - 100^\circ\text{C}$ klein ist, wurde vernachlässigt. Es ergab sich:

$$H(\bar{r}, \bar{a}) = H_0 h'(\bar{r}) \sin 2 \bar{a},$$

$$\text{wobei } H_0 = \left[\frac{(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})}{V\varrho_{xx}\varrho_{yy}} \right]_{T=T_m} \cdot \frac{1}{4} \frac{T_b - T_a}{\ln b/a}$$

und

$$h'(\bar{r}) = 1 + \frac{d \ln (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})}{dT} \left\{ T(\bar{r}) - T_m - \frac{1}{2} \frac{T_b - T_a}{\ln b/a} \right\} - \frac{d \ln \frac{V\varrho_{xx}\varrho_{yy}}{dT}}{dT} \{T(\bar{r}) - T_m\}$$

Beispielsweise ist für Antimon bei $T_b - T_a = 50^\circ\text{C}$ der größte und kleinste Wert von h' : $0,87 - 1,09$.

4. Beispiel (vgl. Abb. 4 u. 5)

Auf der Kristallplatte seien je eine nahezu punktförmige Wärmequelle und Wärmesenke vorhanden. Die Ausdehnung der Platte sei groß gegenüber dem Abstand d von Quelle und Senke. Experimentell sind Wärmequelle und Senke durch die Spitzen (mit dem Radius $a \ll d$) zweier gut wärmeleitender Stäbe, die mit Wärmereservoirn der Temperaturen T_1 und T_2 verbunden sind, zu realisieren. Die Temperaturreteilung in der Kristallplatte ist

$$T = \begin{cases} T_1 & \bar{r}_1 \leq a, \\ T_2 & \bar{r}_2 \leq a, \\ \frac{T_2 - T_1}{2 \ln d/a} \ln \frac{\bar{r}_1}{\bar{r}_2} + \frac{T_1 + T_2}{2} & \bar{r}_1 > a, \\ \frac{T_2 - T_1}{2 \ln d/a} \ln \frac{\bar{r}_2}{\bar{r}_1} + \frac{T_1 + T_2}{2} & \bar{r}_2 > a, \end{cases}$$

wenn \bar{r}_1 , \bar{r}_2 die Abstände des Aufpunktes von Quelle und Senke sind. Die Temperatur der Platte in großem Abstand von Quelle und Senke ist $(T_1 + T_2)/2$. Stromfunktion H und Potentialfeld ergeben sich wegen der Linearität der Gl. (2.14) durch Überlagerung der aus dem 3. Beispiel bekannten Stromfunktionen bzw. Potentialfelder einer Wärmequelle und einer Wärmesenke:

$$H = H_0 \{\sin 2 \bar{a}_1 - \sin 2 \bar{a}_2\},$$

$$\text{wobei } H_0 = \frac{\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}}{4 V\varrho_{xx}\varrho_{yy}} \frac{T_2 - T_1}{2 \ln d/a}$$

$$-\{\varphi^* - \varphi_0^*\} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \left\{ T - \frac{T_1 + T_2}{2} \right\} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{4} \frac{T_2 - T_1}{2 \ln d/a} \{\cos 2 \bar{a}_1 - \cos 2 \bar{a}_2\}.$$

Dabei sind \bar{a}_1 , \bar{a}_2 die Winkel des von der Quelle bzw. Senke gesehenen Aufpunktes gegen die x -

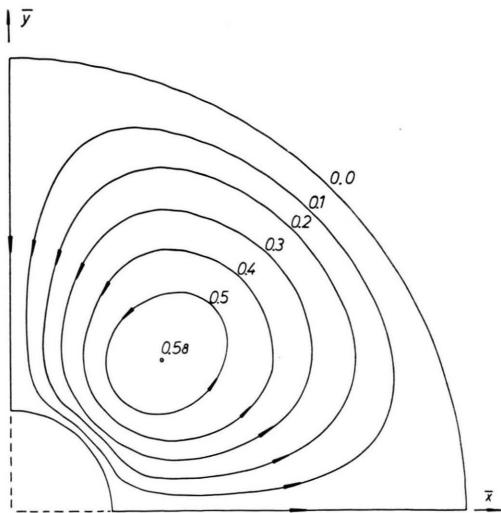


Abb. 2. Ringförmige Kristallplatte, deren Ränder auf verschiedenen Temperaturen gehalten werden. Nur ein Quadrant der Platte ist dargestellt, da die Stromfunktion $H(\bar{x}, \bar{y})$ gegenüber einer Spiegelung an der \bar{x} - wie an der \bar{y} -Achse antisymmetrisch ist.

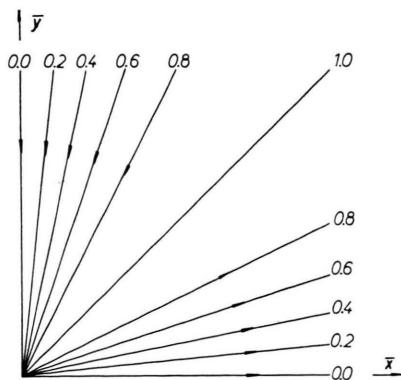


Abb. 3. Eine punktförmige Wärmequelle oder Wärmesenke auf einer unendlich ausgedehnten Kristallplatte. Dargestellt ist nur ein Quadrant der Platte, da die Stromfunktion $H(\bar{x}, \bar{y})$ gegenüber einer Spiegelung an der \bar{x} - wie an der \bar{y} -Achse antisymmetrisch ist.

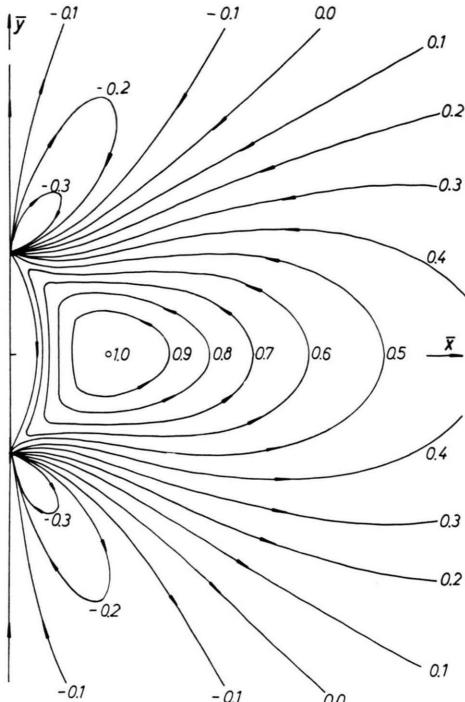


Abb. 4. Wärmequelle und Wärmesenke auf einer unendlich ausgedehnten Kristallplatte. Die Verbindungslinie Quelle—Senke ist parallel zur \bar{y} -Achse. Dargestellt ist nur eine Halbebene der Platte, da die Stromfunktion gegenüber einer Spiegelung an der \bar{y} -Achse antisymmetrisch ist.

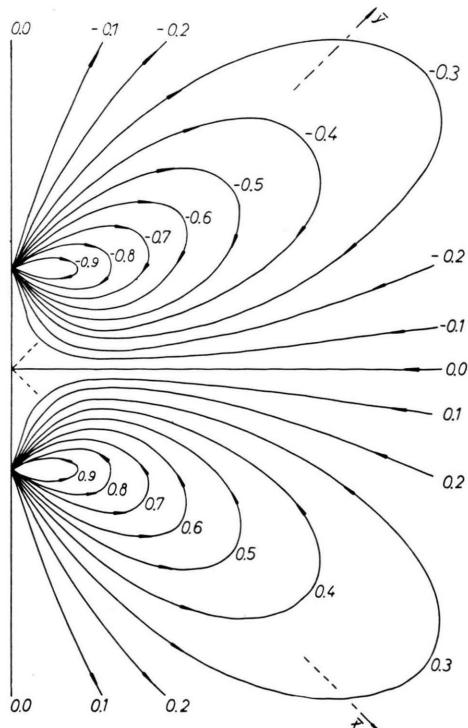


Abb. 5. Wärmequelle und Wärmesenke auf einer unendlich ausgedehnten Kristallplatte. Die Verbindungslinie Quelle—Senke ist die Winkelhalbierende zwischen \bar{x} - und \bar{y} -Achse. Dargestellt ist nur eine Halbebene der Platte, da die Stromfunktion $H(\bar{x}, \bar{y})$ gegenüber einer Spiegelung an der Verbindungslinie Quelle—Senke symmetrisch ist.

Abb. 2—5. Darstellung der Stromlinien $H(\bar{x}, \bar{y}) = \text{const}$ der geschlossenen elektrischen Ströme in plattenförmigen thermoelektrisch-anisotropen Einkristallen. (Der Wert der Stromfunktion H ergibt sich durch Multiplikation der an die Stromlinien geschriebenen Zahlenwerte mit der im Text für jedes Beispiel angegebenen Konstanten H_0 .)

Achse. Die frei wählbare Konstante φ_0^* ist das Potential φ^* in sehr großer Entfernung von Wärmequelle und Senke (und auf der Mittelsenkrechten auf der Verbindungsleitung Quelle – Senke).

Abb. 4 u. 5 zeigen die Stromlinien $H(\bar{x}, \bar{y}) = \text{const}$ für zwei verschiedene Orientierungen der Verbindungsleitung Wärmequelle – Wärmesenke zu den Kristallachsen \bar{x}, \bar{y} .

Die von den stationären geschlossenen elektrischen Strömen erzeugten Magnetfelder werden im folgenden betrachtet. Durch die Messung dieser Magnetfelder wäre experimentell nicht nur die Existenz der geschlossenen Ströme nachweisbar, sondern auch ihre Verteilung in der Kristallplatte bestimmbar. Das Magnetfeld \mathbf{H} lässt sich nach dem BIOT-SAVARTSchen Gesetz (geschrieben im MKSA-System) :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \quad (2.18)$$

aus den Stromdichten \mathbf{I} und somit auf Grund von Gl. (2.7) aus der Stromfunktion $H(x, y)$ berechnen:

$$H_x(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{(z-z') \cdot \partial H(x', y')/\partial x'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dx' dy' dz', \quad (2.19 \text{ a})$$

$$H_y(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{(z-z') \cdot \partial H(x', y')/\partial y'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dx' dy' dz', \quad (2.19 \text{ b})$$

$$H_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{(x-x') \cdot \partial H(x', y')/\partial x' + (y-y') \cdot \partial H(x', y')/\partial y'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dx' dy' dz'. \quad (2.20)$$

Für die relative Permeabilität des Kristalls ist $\mu = 1$ angenommen.

Die Kristallplatte werde durch die Ebenen $z = z_1$ und $z = z_2$ begrenzt; ihre Dicke ist demnach $D = z_2 - z_1 (> 0)$. Die Ausdehnung der Platte in x - und y -Richtung sei von z unabhängig, aber im übrigen beliebig.

Aus Gl. (2.19 a und b) folgt durch Integration über z' und eine partielle Integration bezüglich x' bzw. y' :

$$H_x(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} (x-x') G(x-x', y-y', z) H(x', y') dx' dy', \quad (2.21 \text{ a})$$

$$H_y(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} (y-y') G(x-x', y-y', z) H(x', y') dx' dy', \quad (2.21 \text{ b})$$

wobei $G(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-z_2)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-z_1)^2]^{3/2}} \right\}.$ (2.21 c)

Aus Gl. (2.20) folgt, indem zuerst über z' integriert und anschließend in ebenen Polarkoordinaten um die Singularität bei $x' = x, y' = y$ bezüglich der radialen Koordinate partiell integriert wird,

$$H_z(x, y, z) = \frac{1}{2} \{ \text{sgn}(z-z_1) - \text{sgn}(z-z_2) \} H(x, y) + \iint_{-\infty}^{+\infty} K(x-x', y-y', z) H(x', y') dx' dy', \quad (2.22 \text{ a})$$

wobei $K(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{z-z_2}{[x^2 + y^2 + (z-z_2)^2]^{3/2}} - \frac{z-z_1}{[x^2 + y^2 + (z-z_1)^2]^{3/2}} \right\}.$ (2.22 b)

Es bedeutet $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$

In Gl. (2.21 a u. b, 22 a) ist für die Stromfunktion $H(x, y)$ auf dem Rand der Kristallplatte und im (stromfreien) Außenraum $H = 0$ zu setzen.

Im Grenzfall eines in z -Richtung nach oben und unten unendlich ausgedehnten Kristalls ergibt sich nach Gl. (2.21 u. 22) :

$$H_x = H_y = 0; \quad H_z(x, y, z) = H(x, y). \quad (2.23)$$

Im Inneren des Kristalls besitzt das Magnetfeld nur eine z -Komponente, die mit der Stromfunktion H identisch ist; im Außenraum ist kein Magnetfeld vorhanden. Danach besitzt die zunächst nur zur Beschreibung

der Ströme nach Gl. (2.7) eingeführte Stromfunktion H eine direkte physikalische Bedeutung im betrachteten Grenzfall; Gl. (2.7) ist mit der MAXWELLSchen Gleichung $\mathbf{I} = \text{rot } \mathbf{H}$ identisch.

Da für die relative Permeabilität des Kristalls $\mu = 1$ angenommen wurde, ist das Magnetfeld an der Kristalloberfläche stetig. Aus Gl. (2.22) ergibt sich speziell für die Ebene $z = z_2$, in der die Kristalloberfläche liegt:

$$H_z(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ H(x, y) - \iint_{-\infty}^{+\infty} K(x - x', y - y') H(x', y') dx' dy' \right\}, \quad (2.24 \text{ a})$$

wobei

$$K(x, y) = (D/2\pi) [x^2 + y^2 + D^2]^{-3/2}. \quad (2.24 \text{ b})$$

Dabei ist D die Dicke der Kristallplatte.

$$\text{Aus Gl. (2.24) folgt für den Grenzfall } D \rightarrow \infty : \quad H_z(x, y) = \frac{1}{2} H(x, y). \quad (2.25)$$

Bei im Verhältnis zu ihren Abmessungen in der x - y -Ebene sehr dicken Kristallen fallen die Linien konstanter z -Komponente des Magnetfeldes an der Kristalloberfläche mit den elektrischen Stromlinien zusammen.

Mit Gl. (2.24) ergibt sich z. B. für das Magnetfeld an der Oberfläche einer in der x - y -Ebene unendlich ausgedehnten Kristallplatte mit einer punktförmigen Wärmequelle oder Senke (obiges 3. Beispiel) mit $H(\bar{r}, \bar{a}) = H_0 \sin 2\bar{a}$:

$$H_z(r, \alpha) = H_0 (D^2/r^2) [\sqrt{1+r^2/D^2} - 1] \sin 2\bar{a}$$

und für den Grenzfall $r \ll D$ – in Übereinstimmung mit Gl. (2.25) – :

$$H_z(r, \alpha) = \frac{1}{2} H_0 \sin 2\alpha.$$

Zur Vereinfachung der Rechnung wurde dabei der elektrische Widerstand als isotrop angenommen, d. h. $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$.

Durch Messung der z -Komponente des Magnetfeldes lässt sich die Stromverteilung in einer Kristallplatte bestimmen. Die Stromfunktion $H(x, y)$ kann aus der Integralgleichung (2.24) berechnet werden, wenn $H_z(x, y)$ auf der Kristalloberfläche und der ganzen übrigen Ebene $z = z_2$ bekannt ist. Gl. (2.24) ist durch FOURIER-Transformation lösbar, da die Integraloperation eine Faltung ist. Die FOURIER-Transformierte des Kerns $K(x, y)$ ist:

$$k(s, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} K(x, y) \exp \{2\pi i(sx + ty)\} dx dy = \exp \{-2\pi D \sqrt{s^2 + t^2}\}. \quad (2.26)$$

Die FOURIER-Transformierte Gl. (2.24) lautet:

$$h_z(s, t) = \frac{1}{2} h(s, t) [1 - k(s, t)]. \quad (2.27)$$

Die Lösung ist

$$h(s, t) = 2 h_z(s, t) / [1 - k(s, t)]. \quad (2.28)$$

bzw. nach der Rücktransformation:

$$H(x, y) = 2 \left\{ H_z(x, y) + \iint_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}(x - x', y - y') H_z(x', y') dx' dy' \right\}, \quad (2.29)$$

$$\text{wobei } \hat{K}(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(s, t)}{1 - k(s, t)} \exp \{-2\pi i(sx + ty)\} ds dt = \frac{1}{2\pi D^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{[1 + (r/nD)^2]^{3/2}}. \quad (2.30)$$

Für $r/D \ll 1$ ist

$$\begin{aligned} \hat{K}(x, y) &= \frac{1}{2\pi D^2} \{ \zeta(2) - \frac{3}{2} \zeta(4) (r/D)^2 - \frac{15}{8} \zeta(6) (r/D)^4 + \dots \} \\ &= \frac{\pi}{12 D^2} \left\{ 1 - \frac{1}{10} \pi^2 (r/D)^2 + \frac{9\pi^4}{740} (r/D)^4 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

3. Die Wärmeeffekte der geschlossenen elektrischen Ströme und ihr Beitrag zum Gesamtwärmestrom

In Kap. 2 wurde angenommen, daß die Temperaturverteilung im Kristall durch die Wärmeleitung allein bestimmt sei. Die geschlossenen elektrischen Ströme im thermoelektrisch-anisotropen Kristall erzeugen aber JOULESche, THOMSON- und BRIDGMAN-Wärme, welche die Temperaturverteilung beeinflussen. Die *stationäre* Temperaturverteilung ergibt sich aus der Forderung, daß die im Kristall pro Volumen- und Zeiteinheit akkumulierte Wärmemenge

$$Q \equiv (\mathbf{I} \cdot \mathbf{E}) - \operatorname{div} \mathbf{I}_w = 0 \quad (3.1)$$

sein muß. Aus Gl. (3.1) folgt mit den Materialgln. (1.3 u. 6) :

$$\sum_{i,k=1}^3 \underbrace{\varrho_{ik} \mathbf{I}_i \mathbf{I}_k}_{\text{Joulesche-}} - \underbrace{T \frac{d\varepsilon_{ki}}{dT} \frac{\partial T}{\partial x_i} \mathbf{I}_k}_{\text{Thomson-}} - \underbrace{\pi_{ik} \frac{\partial \mathbf{I}_k}{\partial x_i}}_{\text{Bridgman-Wärme}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = 0. \quad (3.2)$$

Die BRIDGMAN-Wärme tritt nur in thermoelektrisch-anisotropen Medien auf.

Gl. (3.2) lautet speziell für die in Kap. 2 behandelten „zweidimensionalen“ Probleme:

$$\varrho_{xx} \mathbf{I}_x^2 + \varrho_{yy} \mathbf{I}_y^2 - T \frac{d\varepsilon_{xx}}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{I}_x - T \frac{d\varepsilon_{yy}}{dT} \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{I}_y - \pi_{xx} \frac{\partial \mathbf{I}_x}{\partial x} - \pi_{yy} \frac{\partial \mathbf{I}_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.3)$$

Die in Gl. (3.2 bzw. 3) eingehenden Stromdichten der geschlossenen elektrischen Ströme hängen nach Kap. 2 ihrerseits von der Temperaturverteilung ab. Temperatur- und Stromverteilung beeinflussen sich demnach gegenseitig. Daher sind die Temperatur- und Stromverteilungen für die zweidimensionalen Probleme des Kap. 2 strenggenommen gleichzeitig aus Gl. (3.3) und Gl. (2.10) zu bestimmen. Die von den geschlossenen elektrischen Strömen erzeugten Wärmemengen sind aber so klein, daß – wie sich im folgenden zeigen wird – die in Kap. 2 aus der Wärmeleitungsgleichung berechnete Näherung für die Temperaturverteilung schon sehr gut ist. Diese 1. Näherung reicht zur Berechnung der elektrischen Ströme aus. Die so in Kap. 2 berechneten Ströme werden in Gl. (3.3) zur Berechnung der Temperaturverteilung in 2. Näherung eingesetzt. Mit der 2. Näherung für die Temperaturverteilung und den elektrischen Strömen wird für die in Kap. 2 behandelten Beispiele der Gesamtwärmestrom im Kristall nach Gl. (1.6) berechnet.

Zuvor wird das einfache Beispiel des rechteckigen Einkristall-Ringes nach Abb. 1 betrachtet. Der im Ring zirkulierende elektrische Strom

$$I = \frac{2}{R} \int_{T_0}^{T'} (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) dT \quad (3.4)$$

(R ist dabei der Gesamtwiderstand des Ringes) erzeugt nach Gl. (1.6) in den zur Kristallachse senkrechten bzw. parallelen Schenkeln des Ringes die

konvektiven Wärmeströme:

$$(\mathbf{I}_w)_{\perp} = \pi_{\perp} I \quad \text{bzw.} \quad (\mathbf{I}_w)_{\parallel} = \pi_{\parallel} I.$$

Die Differenz dieser Wärmeströme tritt in den Ecken des Ringes, in denen der elektrische Strom seine Richtung gegenüber der Kristallachse ändert, als (pro Zeiteinheit entstehende) BRIDGMAN-Wärme Q_B auf. Dabei ist in den Ecken des Ringes, die sich auf der Temperatur T' befinden:

$$Q_B(T') = -(\pi_{\parallel} - \pi_{\perp})_{T=T'} \cdot I, \quad (3.5 \text{ a})$$

bzw. in den Ecken mit der Temperatur T_0 :

$$Q_B(T_0) = -(\pi_{\parallel} - \pi_{\perp})_{T=T_0} \cdot I. \quad (3.5 \text{ b})$$

In den Schenkeln des Ringes erzeugt der Strom JOULESche und THOMSON-Wärme. Die im ganzen Kristall erzeugten Jouleschen und THOMSON-Wärmenden Q_J und Q_{Th} werden je zur Hälfte an die Ecken mit der Temperatur T' , bzw. an die Ecken mit der Temperatur T_0 abgegeben. Die an eine Ecke pro Zeiteinheit abgegebene Wärmemenge ist:

$$\frac{1}{4} (Q_J + Q_{Th}) = \frac{1}{2} \frac{d(\pi_{\parallel} - \pi_{\perp})}{dT} (T' - T_0) I. \quad (3.6)$$

Mit Gl. (3.5 und 6) ergibt sich als Wärmemenge ΔI_w , die jeder Ecke des Ringes, die sich auf der höheren Temperatur befindet, pro Zeiteinheit entzogen und jeder Ecke mit der niedrigeren Temperatur zugeführt wird:

$$\Delta I_w = (\pi_{\parallel} - \pi_{\perp})_{T=T_m} I. \quad (3.7)$$

Dabei ist $T_m = (T_a + T_b)/2$ die mittlere absolute Temperatur des Kristalls. Für kleine Temperaturdifferenzen ($T' - T_0$) ist der elektrische Strom I und damit auch der durch das Fließen dieses Stromes bedingte Wärmestromanteil ΔI_w proportional zu $(T' - T_0)$. Für den Gesamtwärmestrom von den Gebieten höherer zu denen tieferer Temperatur folgt dann:

$$I_w = I_w^0 \left\{ 1 + \frac{T_m \cdot (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})^2 \cdot r = T_m}{(\lambda_{\parallel} F_{\parallel} / l_{\parallel} + \lambda_{\perp} F_{\perp} / l_{\perp}) (\varrho_{\parallel} l_{\parallel} / F_{\parallel} + \varrho_{\perp} l_{\perp} / F_{\perp})} \right\} \quad (3.8)$$

Dabei ist I_w^0 der Gesamtwärmestrom im stromlos gedachten Kristall. Ferner bezeichnen F_{\parallel} , F_{\perp} die Querschnittsflächen und l_{\parallel} , l_{\perp} die Längen der Schenkel des Ringes. Unter der Annahme einer isotropen WIEDEMANN-FRANZ-LORENZ-Zahl L – vgl. Gl. (2.15) – wird für $F_{\parallel} l_{\perp} / F_{\perp} l_{\parallel} = \varrho_{\parallel} / \varrho_{\perp} = \lambda_{\perp} / \lambda_{\parallel}$ der maximale Wert von I_w / I_w^0 erreicht:

$$\left(\frac{I_w}{I_w^0} \right)_{\max} = 1 + \frac{(\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})^2 \cdot r = T_m}{4 L} \quad (3.9)$$

Die Vergrößerung des Gesamtwärmestromes durch das Fließen der geschlossenen elektrischen Ströme wird im folgenden für die in Kap. 2 behandelten Beispiele berechnet. Dabei wird die an den Kristall angelegte Temperaturdifferenz wieder als klein vorausgesetzt, so daß die Temperaturabhängigkeit der

Materialkonstanten vernachlässigt werden darf. Eine Abschätzung zeigt, daß die von den geschlossenen Strömen erzeugten JOULESchen und THOMSON-Wärmen, die von der angelegten Temperaturdifferenz quadratisch abhängen, gegenüber der in der Temperaturdifferenz linearen BRIDGMAN-Wärme vernachlässigbar sind, sofern das Verhältnis von angelegter Temperaturdifferenz zu mittlerer absoluter Temperatur des Kristalls klein ist. Diese Voraussetzung sei erfüllt. Bei der Berechnung der Temperaturverteilung in 2. Näherung aus Gl. (3.3) wird nur die BRIDGMAN-Wärme berücksichtigt. Damit wird aus Gl. (3.3), wenn gleichzeitig die elektrischen Ströme nach Gl. (2.7) durch die Stromfunktion H ausgedrückt werden:

$$\lambda_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = (\pi_{xx} - \pi_{yy}) \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \quad (3.10)$$

Ist die WIEDEMANN-FRANZ-LORENZ-Zahl isotrop, lautet Gl. (3.10) in den durch Gl. (2.12) eingeführten Koordinaten \tilde{x} , \tilde{y} :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{y}^2} = \frac{\pi_{xx} - \pi_{yy}}{\sqrt{\lambda_{xx} \lambda_{yy}}} \frac{\partial^2 H}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \quad (3.11)$$

Aus Gl. (3.11) ergeben sich mit den aus Kap. 2 bekannten Stromfunktionen und den bekannten Randbedingungen für die Temperatur die folgenden 2. Näherungen für die Temperaturverteilungen:

1. Beispiel:

$$T(\tilde{r}, \tilde{\alpha}) = \frac{T_b - T_a}{\ln b/a} \ln \frac{\tilde{r}}{b} + T_b + \frac{(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})^2}{8 L} \frac{T_b - T_a}{\ln b/a} \left\{ \frac{1}{a^2 + b^2} \left[\tilde{r}^2 + \frac{a^2 \ln \tilde{r}/b - b^2 \ln \tilde{r}/a}{\ln b/a} \right] - \cos 4 \tilde{\alpha} \left[\frac{1}{4} - \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \frac{1}{\tilde{r}^2} + c_1 \tilde{r}^4 + \frac{c_2}{\tilde{r}^4} \right] \right\}$$

Die Koeffizienten c_1 und c_2 ergeben sich aus den Bedingungen:

$$\left[\frac{1}{4} - \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \frac{1}{\tilde{r}^2} + c_1 \tilde{r}^4 + \frac{c_2}{\tilde{r}^4} \right] = 0 \quad \text{für } \tilde{r} = a \quad \text{und } \tilde{r} = b$$

2. Beispiel:

$$T(\tilde{r}, \tilde{\alpha}) = \frac{T_b - T_a}{\ln b/a} \ln \frac{\tilde{r}}{b} + T_b + \frac{(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})^2}{8 L} \frac{T_b - T_a}{\ln b/a} \left\{ \frac{b^2 - a^2}{c^4} \left[\tilde{r}^2 + \frac{a^2 \ln \tilde{r}/b - b^2 \ln \tilde{r}/a}{\ln b/a} \right] - \cos 4 \tilde{\alpha} \left[\frac{1}{4} - \frac{a^2}{\tilde{r}^2} + d_1 \tilde{r}^4 + \frac{d_2}{\tilde{r}^4} \right] \right\}$$

Die Koeffizienten d_1 und d_2 sind aus den Bedingungen:

$$\left[\frac{1}{4} - \frac{a^2}{\tilde{r}^2} + d_1 \tilde{r}^4 + \frac{d_2}{\tilde{r}^4} \right] = 0 \quad \text{für } \tilde{r} = a \quad \text{und } \tilde{r} = b \quad \text{zu bestimmen.}$$

3. Beispiel:

$$T(\tilde{r}, \tilde{\alpha}) = \frac{T_b - T_a}{\ln b/a} \ln \frac{\tilde{r}}{b} + T_b - \frac{(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})^2}{32 L} \frac{T_b - T_a}{\ln b/a} \cos 4 \tilde{\alpha}$$

$$4. \text{ und } 5. \text{ Beispiel: } T = \frac{T_2 - T_1}{2 \ln d/a} \ln \frac{r_1}{r_2} + \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})^2}{32 L} \frac{T_2 - T_1}{2 \ln d/a} [\cos 4 \tilde{\alpha}_1 - \cos 4 \tilde{\alpha}_2]$$

Mit den obigen Temperaturverteilungen und den aus Kap. 2 bekannten Strömen lassen sich nach Gl. (1.6) die Wärmestromdichten im Kristall berechnen. Für den gesamten Wärmestrom I_w , der im Kristall von den Gebieten mit höherer Temperatur zu den Gebieten mit der niedrigeren Temperatur fließt, ergibt sich:

1. Beispiel:

$$I_w = I_w^0 \left\{ 1 + \frac{(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})^2}{8 L} \left[1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \frac{1}{\ln b/a} \right] \right\},$$

2. Beispiel:

$$I_w = I_w^0 \left\{ 1 + \frac{(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})^2}{8 L} \left[1 - \frac{(b^2 - a^2)^2}{c^4} \frac{1}{\ln b/a} \right] \right\},$$

3., 4. und 5. Beispiel:

$$I_w = I_w^0 \left\{ 1 + \frac{(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})^2}{8 L} \right\}.$$

Dabei ist I_w^0 der Wärmestrom bei Vernachlässigung des Einflusses der geschlossenen elektrischen Ströme. Für Kristallplatten der Dicke 1 [Längeneinheit] ist für das 1., 2. und 3. Beispiel:

$$I_w^0 = 2 \pi \sqrt{\lambda_{xx} \lambda_{yy}} \frac{T_b - T_a}{\ln b/a},$$

für das 4. und 5. Beispiel:

$$I_w^0 = 2 \pi \sqrt{\lambda_{xx} \lambda_{yy}} \frac{T_2 - T_1}{2 \ln d/a}.$$

Die obigen Ergebnisse zeigen, daß die durch das Fließen der geschlossenen elektrischen Ströme bedingte Vergrößerung des Gesamtwärmestromes in thermoelektrisch-anisotropen Kristallen von der Form des Kristalls und der Temperaturverteilung abhängt. Das Verhältnis I_w/I_w^0 , das auch als Verhältnis der „effektiven Wärmeleitfähigkeit“ des Kristalls zu seiner Wärmeleitfähigkeit im „stromlosen“ Zustand aufgefaßt werden kann, erreicht für die obi-

gen Beispiele maximal den Wert

$$\{1 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})^2/8 L\},$$

gegenüber $\{1 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})^2/4 L\}$

im Fall des zuvor betrachteten rechteckigen Einkristall-Ringes.

Aus der Tabelle der Materialkonstanten in Kap. 2 ergeben sich für die dort aufgezählten Metalle folgende Werte für $(\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})^2/4 L$:

$$\text{Bi } 2,2 \cdot 10^{-2}; \quad \text{Sb } 0,7 \cdot 10^{-2}; \quad \text{Cd } 0,01 \cdot 10^{-2};$$

$$\text{Zn } 0,003 \cdot 10^{-2}.$$

Für Metalle ist demnach der Einfluß der geschlossenen elektrischen Ströme auf die Temperaturverteilung und den Gesamtwärmestrom recht klein.

Herrn Prof. Dr. M. KOHLER danke ich für die Stellung des Themas dieser Arbeit und für zahlreiche Diskussionen.